Проблемы экономической теории

Васин А.А.
Эволюционная теория игр и экономика. Часть 1. Принципы оптимальности и модели динамики поведения.

Вебер Ш., Габжевич Дж., Гинзбург В., Савватеев А.В., Филатов А.Ю.
Языковое разнообразие и его влияние на экономические и политические решения.

Кнобель А.Ю.
Вертикальная интеграция и экономический рост: эмпирическое исследование.

А.А. Васин
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Эволюционная теория игр и экономика Часть 1. Принципы оптимальности и модели динамики поведения[1]

Рассматриваются основные понятия эволюционной теории игр и дается обзор наиболее важных приложений в области моделирования экономического поведения. Излагается обоснование принципа равновесия Нэша для агентов с огра-ниченной рациональностью и неполной информацией. Обсуждаются модели формирования целевых функций (эволюции предпочтений).

Ключевые слова: *эволюционно устойчивая стратегия, динамика репликаторов, адаптивная динамика.*

Классификация JEL: C73.

1. Введение

Цель статьи – познакомить российских экономистов с новым направлением в теории игр. В первой части статьи дается обзор основных понятий и математических результатов эволюционной теории игр (ЭТИ) с точки зрения моделирования экономического поведения. Во второй части будут рассмотрены модели распространения кооперации и альтруизма, особенности эволюции социального поведения в сравнении с поведением в биологических популяциях, а также дан краткий библиографический очерк работ по данной тематике. Формальное изложение и доказательства утверждений можно найти в (Васин, 1995; Богданов, Васин, 2002).

Теория игр широко используется для описания и анализа поведения экономических агентов в микроэкономике, экономике общественного сектора, политэкономии и других разделах экономической теории.

В классическом теоретико-игровом анализе важнейшую роль играют понятие игры в нормальной форме (как модели взаимодействия агентов) и принцип равновесия Нэша (как способ определения стратегий агентов при взаимодействии). Игра в нормальной форме характеризуется множеством участников, или игроков, для каждого из которых задается множество возможных стратегий поведения и функция выигрыша (в экономических приложениях – функция полезности). Согласно принципу равновесия Нэша разумные игроки реализуют стратегии, образующие ситуацию равновесия (по Нэшу), т.е. имеется такой набор стратегий, при котором отдельный игрок не может увеличить свой выигрыш за счет изменения своей стратегии при фиксированных стратегиях остальных игроков. Другая важная концепция

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № 693.2008.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00249). Автор благодарен рецензенту за полезные замечания и ссылки на литературу.

в моделировании рационального поведения – принцип исключения доминируемых стратегий. Стратегия игрока называется доминируемой, если существует альтернативная стратегия, обеспечивающая ему больший выигрыш при любых стратегиях остальных игроков. Принцип исключения означает, что рациональные игроки не будут использовать доминируемые стратегии. Более того, процедуру исключения можно проводить итеративно: после отбрасывания доминируемых стратегий на первом этапе некоторые стратегии, не являющиеся изначально доминируемыми, могут оказаться таковыми на суженных множествах стратегий. Последовательно применяя принцип исключения, можно за несколько шагов получить множество недоминируемых стратегий, из которого согласно данной концепции и выбирают свою стратегию рациональные игроки.

Первая проблема, решению которой служит ЭТИ, – обоснование соответствия реального поведения экономических агентов принципам равновесия Нэша и исключения доминируемых стратегий. Дело в том, что в типичном случае поиск равновесий Нэша и множеств недоминируемых стратегий представляет нетривиальные математические задачи, для решения которых необходимо довольно точное знание всех множеств стратегий и функций выигрыша (например, модели экономической конкуренции по Курно и Бертрану). Обычный участник такого взаимодействия располагает точной информацией лишь о своих стратегиях и функции выигрыша и зачастую не знает об упомянутых выше принципах принятия решений. Почему можно ожидать, что его поведение будет им соответствовать?

В разд. 2 излагается обоснование принципов равновесия Нэша и исключения доминируемых стратегий с помощью моделей адаптивно-подражательного поведения (МАПП). Эти модели показывают, что сходимость к равновесию по Нэшу и исключение доминируемых стратегий в определенных условиях вытекают из общих свойств эволюционных и адаптивно-подражательных механизмов формирования поведения. При этом не требуется ни полной информированности, ни особой рациональности в выборе стратегий: достаточно знать размеры выигрышей для текущей стратегии поведения и выбранной альтернативы. Также в разд. 2 обсуждается понятие эволюционно-устойчивой стратегии (ЭУС) и его связь с равновесием Нэша.

ЭТИ предлагает новое решение проблемы определения функций полезности участников при исследовании их социально-экономического поведения. В классической теории игр функции выигрыша предполагаются экзогенно заданными и не меняются. В приложениях теории игр к экономике и социологии используются принятые в этих областях предположения относительно функций полезности индивидуумов. Проблема заключается в том, что стандартные предположения не всегда соответствуют реальности и в то же время существенно влияют на результаты исследований. В частности, в современных учебниках по экономике изложение материала строится на концепции «homo economicus» – «человека экономического». Такой субъект в роли производителя товаров или услуг стремится максимизировать свою прибыль, а в роли их потребителя хочет увеличить объем собственного потребления. Если модель включает рынок труда, то индивидуальная функция полезности зависит также от рабочего времени и убывает по этому показателю (Myles, 1995).

Однако поведение большой части населения зачастую не соответствует стандартным предположениям относительно индивидуальных функций полезности. Что касается рынка труда (Atkinson, Stiglitz, 1980), то некоторые люди рассматривают определенные виды работы как представляющие самостоятельный интерес или общественно важные и готовы выполнять их за меньшую заработную плату, чем они могли бы получить на другой работе. Для других индивидуумов наиболее важным стимулом является не абсолютная величина дохода, а его относительная величина, то есть ранг в общем распределении доходов людей, с которыми они общаются. Наконец, определенная категория людей ценит свою работу как место общения.

Разумеется, возможность применить традиционные модели существенно зависит от конкретной области исследований. Не углубляясь в анализ различных приложений, отметим, что стандартные предположения относительно индивидуальных функций полезности являются сомнительными в моделях политической конкуренции, противоречат известному феномену альтруистического поведения и плохо согласуются с этическими принципами основных мировых религий.

Укажем еще один пробел традиционной теории рационального поведения. Все теоретико-игровые принципы оптимальности исходят из следующей парадигмы: в ситуации стратегического выбора индивидуум должен максимизировать свой выигрыш, учитывая возможности и интересы других участников. Однако социальная практика ставит под сомнение этот стандартный взгляд на принятие решений. Она показывает, что наиболее эффективным путем для достижения собственных целей может быть активное воздействие на функции выигрыша других участников. Типичными примерами поведения, меняющего функции полезности других субъектов, являются «агрессивная» реклама и распространение наркотиков. Конечно, реклама выполняет и информационную функцию. Однако «агрессивная» реклама, с которой мы постоянно сталкиваемся на телевидении и радио, преследует другую цель, а именно – заставить потребителя приобрести товар, который он в отсутствие такой рекламы не стал бы приобретать, даже зная о его существовании. Результаты статистических исследований показывают, что на детей, подростков и значительную часть молодежи реклама оказывает сильное влияние. Об эффективности рекламы свидетельствует многомиллиардный оборот компаний, которые занимаются производством детских игрушек и вкладывают в рекламу очень большие средства. Что касается распространения наркотиков, то известно, что первый раз знакомство с ними происходит случайно, нередко даже вопреки желанию потребителя. И хорошо известно, как меняется целевая функция субъекта после нескольких приемов наркотика.

В связи с изложенным возникают следующие вопросы: существует ли какая-то естественная функция полезности индивидуума и как ее определить? Если такая функция существует, то почему она подвержена внешним воздействиям, и в чем состоят механизмы ее изменения?

В поисках ответа на эти вопросы в настоящей работе мы обратимся к моделям ЭТИ, описывающим процесс эндогенного формирования функций полезности для самовоспроизводящихся популяций. К самовоспроизводящимся популяциям относятся и человеческие, и животные, и искусственные, например популяции самовоспроизводящихся автоматов. В таких популяциях каждый новый индивидуум является прямым потомком взрослого члена популяции, а значения рождаемости и смертности зависят от стратегий поведения. Динамику распределения по стратегиям обусловливают демографические показатели и эволюционный механизм. В общем случае такой механизм представляет некоторую комбинацию генетического наследования, подражания, обучения и индивидуальной адаптации. Он определяет стратегию при рождении нового индивидуума и ее изменение в течение его жизни. Простейший механизм – репликация, или прямое наследование, означает, что новорожденный наследует стратегию родителя (того же пола) и не меняет ее до самой смерти. Существует огромное многообразие возможных эволюционных механизмов, в том числе связанных с оптимизацией некоторой функции полезности.

Основной вывод, к которому приводят результаты разд. 3, заключается в том, что естественная функция полезности индивидуума в самовоспроизводящейся популяции, независимо от ее конкретной природы, связана с индивидуальным воспроизводством. Точнее говоря, любое устойчивое распределение по стратегиям является равновесием Нэша относительно функции индивидуальной приспособленности, т.е. суммы рождаемости и выживаемости членов популяции, применяющих данную стратегию. Кроме того, доля индивидуумов, использующих доминируемые по отношению к этой функции стратегии, стремится к нулю. Следует отметить, что далеко не всякая модель динамики популяционного поведения обладает указанными свойствами. Существуют иные механизмы адаптивно-подражательного поведения и генотипической эволюции популяций, которые не удовлетворяют принципам Нэша, и исключения доминируемых стратегий для индивидуальной приспособленности. Возникает вопрос, почему следует предпочесть им модели, согласованные с этой функцией выигрыша?

Ключевую роль в обосновании результатов разд. 3 играет модель естественного отбора эволюционных механизмов. В ней рассматривается сообщество взаимодействующих популяций, различающихся этими механизмами. Анализ модели показывает, что если репликация входит во множество конкурирующих механизмов, то динамика поведения сообщества согласована с индивидуальной приспособленностью стратегий в указанном смысле. Похожий результат получен в работе (Ok, Vega-Redondo, 2001), где исследовалась эволюция индивидуальных предпочтений.

2. Модель адаптивно-подражательного поведения (МАПП) и игровые принципы оптимальности

В этом разделе рассматривается понятие *популяционной игры* как статической модели взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов. В ЭТИ это понятие аналогично понятию игры в нормальной форме в классической теории и для него обобщаются основные некооперативные принципы оптимальности: равновесие по Нэшу и решения по доминированию, а также вводится понятие *эволюционно устойчивой стратегии* (Smith, Price, 1973). Затем рассматриваются модели динамики поведения в популяции и выясняется взаимосвязь устойчивых распределений по стратегиям с упомянутыми принципами оптимальности.

Формально популяционная игра G задается совокупностью параметров $G = \left\langle J, f_j(\pi,\omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \right\rangle$, где J − множество стратегий участников этой игры; $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ − распределение игроков по стратегиям; $\Pi = \{\pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ − стандартный симплекс; $f_j(\pi,\omega)$ – выигрыш игроков, использующих стратегию j в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды). Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.

Первая популяционная игра, описанная и исследованная основоположником ЭТИ М. Смитом, – парные конкурентные столкновения за некоторый ресурс. Хотя игра изначально рассматривалась для популяций животных, подобные взаимодействия происходят и в человеческом обществе. Пусть индивидуумы популяции ищут желаемые объекты (например, пищу, место для жилья или самку). Некоторые из них получают объект без столкновения, а другие случайным образом сталкиваются в парах, причем одни из них оказываются в роли хозяина объекта конкуренции (α), а другие – в роли захватчика (β); J^{α} и J^{β} – множества вариантов поведения, или альтернатив в соответствующих ролях; $\phi^{\alpha}_{j^{\alpha} j^{\beta}}$ и $\phi^{\beta}_{j^{\alpha} j^{\beta}}$ – выигрыши индивидуумов, если α выбирает вариант $j^{\alpha} \in J^{\alpha}$, а β предпочел вариант $j^{\beta} \in J^{\beta}$. Вероятность столкновения $\lambda(N)$ не зависит от стратегий и определяется численностью популяции N, ϕ^{0} – выигрыш индивидуумов, избежавших столкновения. Стратегией индивидуума является правило выбора варианта поведения в зависимости от роли. Формально стратегия задается парой $j = (J^{\alpha}, J^{\beta})$, где $j^{\alpha} \in J^{\alpha}$, $j^{\beta} \in J^{\beta}$.

Функция $f_j(\pi, N)$ указывает средний выигрыш индивидуумов, использующих стратегию j. Обозначим через $p_{\alpha}(\pi)$ и $p_{\beta}(\pi)$ распределения по вариантам поведения индивидуумов в ролях α и β, соответствующие распределению по стратегиям π. Тогда

$$p_{j^{\alpha}}(\pi) = \sum_{j^{\beta} \in J^{\beta}} \pi_{j^{\alpha} j^{\beta}}, \quad p_{j^{\beta}}(\pi) = \sum_{j^{\alpha} \in J^{\alpha}} \pi_{j^{\alpha} j^{\beta}},$$

а для стратегии $i = (i^{\alpha}, i^{\beta})$:

$$f_{i^{\alpha} i^{\beta}}(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^{0} + 0{,}5\lambda(N)\Big(\sum_{j^{\beta} \in J^{\beta}} \phi^{\alpha}_{i^{\alpha} j^{\beta}} p_{j^{\beta}}(\pi) + \sum_{j^{\alpha} \in J^{\alpha}} \phi^{\beta}_{j^{\alpha} i^{\beta}} p_{j^{\alpha}}(\pi)\Big).$$

Рассмотрим случай, когда участники не различают состояния. Тогда множество стратегий совпадает с множеством альтернатив:

$$J = J^{\alpha} = J^{\beta}, \quad \pi = (\pi_j, j \in J), \quad \phi^{\alpha}_{ij} = \phi_{ij}, \quad \phi^{\beta}_{ij} = \phi_{ji},$$

$$\overline{f}_i(\pi) = \sum_{j \in J} \pi_j \phi_{ij}, \quad f_i(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^{0} + \lambda(N)\overline{f}_i(\pi).$$

В этом случае G эквивалентна игре $\overline{G} = \left\langle J, \overline{f}_i(\pi), i \in J, \pi \in \Pi \right\rangle$. Отметим, что ситуация, когда множество вариантов поведения и значения выигрыша индивидуума не зависят от его роли, возможна и в предыдущей модели. Однако, как показано ниже, модели поведения для этих внешне похожих ситуаций оказываются различными.

Рассмотрим основные статические принципы оптимальности, применяемые для изучения популяционных взаимодействий.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется распределение π^{*} такое, что всякая стратегия, которая используется с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω, т.е.

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \forall\, j \in J \ \ (\pi^{*}_{j} > 0) \quad \Rightarrow \quad j \in \operatorname{Arg}\max_{i \in J} f_i(\pi^{*}, \omega). \qquad (1)$$

Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, т.е. имеют вид

$f_j(\pi,\omega) = a(\pi,\omega)\overline{f}_j(\pi) + b(\pi,\omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω. Тогда (1) эквивалентно условию, которое уже не содержит параметра ω:

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad j \in \operatorname{Arg}\max_{i \in J} \overline{f}_i(\pi^*).$$

Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться. Поэтому приведем другие, более сильные, критерии оптимальности.

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется распределение π^* такое, что:

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \forall\, \pi \neq \pi^*\ \exists \overline{\lambda}(\pi) \in (0,1): \quad \forall \lambda \in (0, \overline{\lambda}(\pi)),$$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_\pi(\lambda\pi + (1-\lambda)\,\pi^*,\, \omega).$$

Здесь $f_\pi(\pi',\omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi',\omega)$ – средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π, если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π'.

Применительно к биологической эволюции поведения понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^*, внедряется относительно небольшая группа «мутантов» с распределением по стратегиям π. Тогда, если распределение π^* эволюционно устойчиво, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность ниже приспособленности исходной стратегии π^*.

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов.

Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша (Schaffer, 1988, 1989). Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где это предположение не выполняется. Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S, состоящим из m стратегий s, и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{J \setminus j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j \equiv s$

такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше выигрыша любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию, т.е. «мутант» не получает преимущества (в смысле значения выигрыша) перед «основной популяцией». Это означает, что определенная ЭУС может не являться равновесием Нэша. Например, для игры, соответствующей симметричной олигополии Курно, в равновесии Нэша игроки используют «рыночную власть» и снижают объемы выпуска по сравнению с конкурентным равновесием, в то время как ЭУС соответствует конкурентному равновесию.

Чтобы правильно выбрать принцип оптимальности, необходимо учесть особенности конкуренции и отбора в рассматриваемой группе. Участник взаимодействия в малой группе часто конкурирует не столько с партнерами, сколько с агентами, участвующими в других взаимодействиях. Например, в рамках олигополии фирму интересует соотношение ее нормы прибыли с аналогичным показателем рынка в целом, поскольку от этого зависит рост стоимости ее акций. Если же конкуренция происходит в рамках данного взаимодействия (в частности, капитал перераспределяется в рамках данной олигополии), то имеет смысл отразить это в функции выигрыша участника.

Рассмотрим разность нормы прибыли для агента и средней нормы прибыли в олигополии. Как показано в (Schaffer, 1989), при таком уточнении не возникает противоречия между концепциями ЭУС и равновесием Нэша. Корректно определить функцию выигрыша позволяют модели взаимодействия в самовоспроизводящихся популяциях (см. разд. 3).

Строгим равновесием популяционной игры G называется распределение π^* такое, что все игроки используют одну и ту же стратегию, и она является единственным лучшим ответом на это распределение:

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad \exists j \in J : \pi_j^* = 1 \quad \text{и} \quad \forall i \neq j, \quad \forall\omega \in \Omega,$$

$$f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Отметим, что любое строгое равновесие является ЭУС, в том числе для групп с достаточно большой конечной численностью. В (Schaffer, 1988) показано, что для случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии участников («хозяин – захватчик» в рассмотренном выше примере) не существует иных ЭУС, кроме строгих равновесий.

Для функций выигрыша $f_j(\pi, \omega)$ может не существовать общего вида равновесий по Нэшу. В других классах игр их оказывается много, причем большинство из них заведомо неустойчивы. В связи с этим представляет интерес другой принцип оптимальности – доминирование, также внутренне связанный с концепцией естественного отбора Дарвина.

Говорят, что стратегия j *доминирует* стратегию i $(j \succeq i)$ на множестве распределений $\Pi' \subseteq \Pi$, если при любом распределении по стратегиям $\pi \in \Pi'$ стратегия j дает больший выигрыш, чем стратегия i, т.е.

$$\exists \varepsilon \geq 0 : \forall \omega \in \Omega, \quad \forall \pi \in \Pi' \quad f_j(\pi, \omega) \geq f_i(\pi, \omega) + \varepsilon.$$

Множество $J' \subseteq J$ называется *доминирующим*, если оно может быть получено в результате последовательного исключения доминируемых стратегий, т.е. найдется такое целое $T > 1$, что

$$J' = J_T \subset J_{T-1} \subset \ldots \subset J_1 = J, \text{ где}$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, T-1\}, \forall i \in J_k \setminus J_{k+1} \; \exists j \in J_{k+1} :$$
$$j \succeq i \text{ на } \Pi_k = \{\pi \in \Pi, \pi_j = 0, \forall j \notin J_k\}.$$

Такая процедура последовательного исключения доминируемых стратегий может рассматриваться как квазидинамическая модель микроэволюции поведения в популяции. Действительно, эта процедура описывает последовательное сокращение множества стратегий, используемых игроками, при этом на каждом шаге более эффективные (обеспечивающие большую приспособленность) стратегии замещают менее эффективные.

Если в данном определении доминирования $\varepsilon > 0$, то говорят, что стратегия j строго доминирует стратегию i ($j \succeq i$), а J' называется строго доминирующим множеством. Аналогично вводятся понятия доминирования смешанными стратегиями и доминирующего в смешанных стратегиях множества.

Поиск равновесий по Нэшу и доминирующих множеств популяционной игры в общем случае представляет довольно сложные экстремальные задачи. Для случайных парных столкновений их удается свести к известным задачам вычисления соответствующих ситуаций равновесия для биматричных игр.

Утверждение 1. *Распределение* π^* *является равновесием по Нэшу игры* $\overline{G}$, *в которой* $\overline{f}_i(\pi) = \sum \pi_j \varphi_{ij}$ *и участники столкновений не различают состояния, в том и только в том случае, если* (π^*, π^*) *– равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях симметричной биматричной игры* $\Gamma = \left\langle (\phi_{ij})_{i,j \in J}, (\phi_{ji})_{i,j \in J} \right\rangle$, *т.е.* $\forall j \in J \;\; (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \operatorname{Arg}\max\limits_{i \in J} \overline{f}_i(\pi)$.

Утверждение 2. *Распределение* π^*, *для которого* $\pi_s^* = 1$, *является строгим равновесием игры* $\overline{G}$ *в том и только в том случае, если* $\phi_{ss} > \phi_{is}$ *для всех* $i \neq s$, *т.е.* (s, s) *– строгое симметричное равновесие по Нэшу игры* Γ *в чистых стратегиях*.

Утверждение 3. *Стратегия* s *доминирует стратегию* r $(s \succeq r)$ *в игре* $\overline{G}$ *в том и только в том случае, если* $s \succeq r$ *в игре* Γ, *т.е.* $\phi_{sj} \geq \phi_{rj}$ *для любых* $j \in J$.

Утверждение 4. *Распределение* $\pi = (\pi_{j^\alpha j^\beta})$ *тогда и только тогда является равновесием по Нэшу игры G для асимметричных парных столкновений, когда* $(p^\alpha(\pi), p^\beta(\pi))$ *– равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях игры* $\Gamma = \left\langle (\phi_{ij})_{i,j \in J}, (\phi_{ji})_{i,j \in J} \right\rangle$.

Таким образом, для всех случайных парных столкновений равновесия Нэша популяционной игры соответствуют равновесиям Нэша биматричной игры, описывающей парное взаимодействие. М. Смит (Smith, 1982) отметил это свойство, не формулируя в явном виде понятия популяционной игры, соответствующей случайным парным столкновениям. Аналогичная связь существует для случайных столкновений с бóльшим числом участников, когда отдельное локальное взаимодействие характеризуется игрой *n* лиц. При этом результаты легко обобщаются на случай межпопуляционных столкновений, когда в определенных ролях выступают индивидуумы из разных популяций или социальных групп («хищник – жертва», «работодатели – наемные работники» и т.п.) (Васин, 1989a). Главное условие соответствия – независимое от стратегий участников распределение по взаимодействующим группам.

Модель адаптивно-подражательного поведения (МАПП). Выясним, при каких условиях адаптивно-подражательные механизмы формируют в популяции поведение, соответствующее принципам Нэша и исключения доминируемых стратегий.

Пусть популяционная игра *G* описывает взаимодействие индивидуумов популяции в каждый момент времени. Численность популяции и внешние факторы постоянны, т.е. функции выигрыша f_j не зависят от ω. С некоторой интенсивностью $r_j = r_j(f(\pi), \pi)$, зависящей от текущего распределения игроков по стратегиям π и текущего вектора выигрышей $f(\pi) = (f_j(\pi), j \in J)$, игрок, использующий стратегию *j*, переходит в «адаптивное» состояние, в котором он пересматривает свое поведение. Предполагаем, что, находясь в адаптивном состоянии, игрок со стратегией *j* выбирает стратегию *i* в качестве альтернативной с вероятностью $q_{ji} = q_{ji}(f(\pi), \pi)$. Затем он сравнивает текущую и альтернативную стратегии и, если стратегия *i* оказывается лучше стратегии *j* (т.е. дает индивидууму больший выигрыш при данном распределении по стратегиям), то с вероятностью $\gamma_{ji} = \gamma_{ji}(f(\pi), \pi)$ игрок изменяет стратегию с *j* на *i*. Тогда $r_j \pi_j \sum_{i: f_i > f_j} q_{ji} \gamma_{ji}$ – средняя доля игроков, меняющих за единицу времени свою стратегию *j* на стратегию из множества $\{i \mid f_i > f_j\}$, а $\sum_{i: f_i < f_j} r_i \pi_i q_{ij} \gamma_{ij}$ – аналогичная доля игроков, меняющих за единицу времени стратегию из множества $\{i \mid f_i < f_j\}$ на стратегию *j*. Таким образом, уравнения динамики для распределения π(*t*) имеют вид

$$\dot{\pi}_j = -r_j \pi_j \sum_{i: f_i > f_j} q_{ji} \gamma_{ji} + \sum_{i: f_i < f_j} r_i \pi_i q_{ij} \gamma_{ij}, \quad j \in J. \qquad (2)$$

Функции r_j, γ_{ji}, q_{ji} удовлетворяют условиям

$$\forall j \in J \quad r_j \geq 0; \quad \forall i, j \in J \quad \gamma_{ji} \geq 0, q_{ji} \geq 0; \quad \forall j \in J \quad \sum_{i \in J} q_{ji} = 1.$$

Указанные условия гарантируют, что траектория $\{\pi(t, \pi^0)\}$ не выходит из множества П в каждый момент времени t и при любом начальном распределении π^0.

Пример 1. Пусть интенсивность перехода в адаптивное состояние постоянна, альтернативная стратегия выбирается путем случайного подражания, а вероятность смены текущей стратегии на альтернативную пропорциональна разности соответствующих функций выигрыша. Таким образом,

$$r_j(f(\pi), \pi) \equiv r, \quad q_{ji}(f(\pi), \pi) = \pi_i,$$
$$\gamma_{ji}(f(\pi), \pi) = \gamma\big(f_i(\pi) - f_j(\pi)\big),$$

и система (2) принимает вид

$$\dot{\pi}_j = r\gamma \pi_j (f_j(\pi) - \sum_{i \in J} \pi_i f_i(\pi)), \quad j \in J.$$

Полученная система является аналогом автономной непрерывной модели динамики репликаторов, рассматриваемой в разд. 3.

Пример 2. Альтернативная стратегия выбирается с равными вероятностями из множества допустимых стратегий, т.е. $q_{ji}(f(\pi), \pi) = 1/|J|$. Этот пример иллюстрирует механизм индивидуальной адаптации, когда каждому игроку известно множество доступных стратегий и адаптация происходит, исходя из текущих значений выигрыша и независимо от поведения остальных членов популяции.

Очевидно, что существует множество различных МАПП. Следующие теоремы в общих предположениях устанавливают связь между устойчивыми состояниями МАПП и решениями соответствующей популяционной игры. Отметим, что любое равновесие по Нэшу популяционной игры G является стационарной точкой МАПП. Обозначим $J(\pi) = \operatorname{Arg}\max_{k \in J} f_k(\pi)$ – множество оптимальных ответов на распределение π.

Теорема 1. *Пусть для МАПП выполняются условия* 1 *и* 2 *и одно из условий* 3 *или* $3'$ *:*

1) для любого $j \in J$ *и любого значения аргумента* $r_j > 0$ *(интенсивности перехода в адаптивное состояние положительны для всех стратегий);*

2) $\forall i, j \in J$ *функции* γ_{ji} *имеют вид* $\gamma(f_i(\pi) - f_j(\pi))$, *где для любого* $x > 0 \quad \gamma(x) > 0$ *(вероятность смены текущей стратегии на альтернативную является функцией от разности соответствующих значений выигрыша и положительна при положительности аргумента);*

3) для любых $j \in J$ *и* $i \in J(\pi)$ *выполнено* $q_{ji} > 0$ *(вероятность выбора стратегии в качестве альтернативной положительна для любой стратегии, дающей наибольший выигрыш при текущем распределении членов популяции по стратегиям);*

3') для любых $j \in J$ *и* $i \in J(\pi)$ *выполнено* $q_{ji} \geq q\pi_i$, *где константа* $q > 0$ *(для любой чистой стратегии, дающей максимальный выигрыш, вероятность выбора этой стратегии в качестве альтернативной не меньше, чем доля в популяции индивидуумов, использующих данную стратегию, умноженная на некоторую положительную константу).*

Тогда:

а) любое устойчивое (по Ляпунову) состояние π^* *системы* (2) *является равновесием по Нэшу популяционной игры* $G = \left\langle J, f_j(\pi), j \in J, \pi \in \Pi \right\rangle$;

б) если начальное распределение $\pi^0>0$ *и для траектории* $\{\pi(t, \pi^0)\}$ *существует* $\lim_{t\to\infty} \pi(t, \pi^0) = \pi^*$, *то* π^* *является равновесием по Нэшу игры G;*

в) если π^* *– точка строгого равновесия для популяционной игры G, то* π^* *– асимптотически устойчивое состояние системы* (2).

Теорема 2. *Пусть для МАПП, заданной системой* (2), *выполняются условия* 1–2 *теоремы* 1 *и пусть:*

1) для любых $i, j \in J$ *имеет место* $q_{ji} = \pi_i$ *(выбор альтернативной стратегии происходит путем случайного подражания);*

2) если $f_j \geq f_i$, *то* $r_j \leq r_i$ *(интенсивность перехода в адаптивное состояние не возрастает при увеличении функции выигрыша);*

3) $\gamma(x)$ *монотонно возрастает по x (вероятность смены текущей стратегии на альтернативную монотонно возрастает по разности выигрышей).*

Если при этом $\overline{J}$ *– строго доминирующее множество стратегий в популяционной игре* $G = \left\langle J, f_j(\pi), j \in J, \pi \in \Pi \right\rangle$, *то для любого* $j \notin \overline{J}$ *и любого начального состояния системы* $\pi^0>0$ *на соответствующей траектории МАПП* $\lim_{t\to\infty} \pi_j(t, \pi^0) = 0$.

Указанные простые достаточные условия согласованности динамики МАПП с решениями по Нэшу и по доминированию (см. (Богданов, Васин, 2002)) не являются необходимыми. Более общие условия для согласованных механизмов адаптации получены в (Васин, 1989а, с. 51–65). Другие варианты таких условий (Samuelson, Zhang, 1992; Weibull, 1995) связаны с понятием монотонной динамики вида $\dot{\pi}_j = \pi_j g_j(\pi), j \in J$, удовлетворяющим условию $g_j(\pi) > g_i(\pi) \Leftrightarrow f_i(\pi) > f_j(\pi), \ \ \forall i, j \in J, \pi \in \Pi$. Однако, как показывают примеры, которые приводятся в (Богданов, Васин, 2002), указанные теоремы справедливы и для немонотонных динамик. В то же время существуют модели адаптации, не удовлетворяющие утверждениям теорем 1 и 2. Рассматриваемые в следующем разделе модели естественного отбора эволюционных механизмов объясняют, почему следует ожидать согласованности реальной динамики поведения с указанными принципами оптимальности. Более того, в рамках этих моделей эндогенно определяются целевые функции участников.

3. Модели динамики поведения в самовоспроизводящихся популяциях

Наиболее известной моделью этого типа является модель динамики репликаторов (МДР). Популяция характеризуется множеством возможных стратегий S. Распределение индивидуумов по стратегиям в некоторый момент времени задается вектором $\pi = (\pi_s, s \in S)$. Предполагается, что индивидуумы различаются только стратегиями поведения и не меняют стратегию в течение жизни, а потомки наследуют стратегию родителей. Если говорить о двуполых популяциях, то в данной модели индивидуумов одного пола следует рассматривать как отдельную популяцию. Известны соответствующие механизмы наследования – генетические, когда стратегия поведения задается генами, сцепленными с половым геном, а также механизмы подражания, когда стратегия формируется путем подражания поведению родителя соответствующего пола. Для участников со стратегией s итог взаимодействия в популяции за данный период времени характеризуется функцией рождаемости $fer_s(\pi, N)$, определяющей среднее число потомков, и функцией выживаемости $\nu_s(\pi, N)$, устанавливающей долю выживших в зависимости от распределения π и общей численности популяции N. Обозначим через $N_s = \pi_s N$ – численность использующих стратегию s. Тогда динамика численностей $N_s(t)$, $s \in S$, описывается системой:

$$N_s(t+1) = N_s(t) f_s(\pi(t), N(t)), \quad t = 1, 2, ..., \tag{3}$$

где $f_s(\pi, N) = fer_s(\pi, N) + v_s(\pi, N)$ называется функцией приспособленности стратегии s и формализует введенное Ч. Дарвином понятие индивидуальной приспособленности.

На первый взгляд, понятие функции выигрыша не применимо к данной модели: стратегии участников фиксированы, они ни к чему не стремятся и ничего не выбирают. Однако картина меняется, если посмотреть на динамику распределения по стратегиям. Приводимая ниже теорема показывает, что в такой популяции асимптотика поведения согласуется с приспособленностью как функцией выигрыша индивидуума. В частности, если при $t \to \infty$ распределение по стратегиям стремится к стационарному, то в популяции остаются лишь те стратегии, которые максимизируют приспособленность (в полном соответствии с дарвиновским принципом естественного отбора выживают наиболее приспособленные). Если при любом распределении одна стратегия обеспечивает большую приспособленность, чем другая, то при $t \to \infty$ доля худшей стратегии в распределении $\pi(t)$ стремится к нулю. И в этом смысле приспособленность является эндогенной целевой функцией в данной модели.

Теорема 3 (о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МДР). *Пусть функция приспособленности* f_s *разложима:* $f_s(\pi,\omega) = a(\pi,\omega)\overline{f}_s(\pi) + b(\pi,\omega)$, *где* $a(\pi,\omega) > 0$. *Тогда:*

1) любое устойчивое (по Ляпунову) распределение π^* *системы* (3) *является равновесием по Нэшу популяционной игры* $\overline{G} = \left\langle S, \overline{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \right\rangle$*;*

2) если начальное распределение $\overline{N}(0) > 0$ *и для траектории* $\{\overline{N}(t)\}$ *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} \pi(t, \overline{N}(0)) = \pi^*$, *то* π^* *является равновесием Нэша указанной популяционной игры.*

Замечание. Система (3) не является замкнутой, поскольку правая часть зависит также от $N(t)$. Понятие устойчивого распределения для таких систем формально определено в (Богданов, Васин, 2002).

Теорема 4 (об асимптотической устойчивости ЭУС). *Пусть в условиях теоремы 3 стратегия* π^* *– эволюционно устойчивая для популяционной игры* $\overline{G}$. *Тогда* π^* *– асимптотически устойчивое распределение системы* (3).

Теорема 5 (о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения). *Пусть* S *– строго доминирующее множество стратегий в игре* $G' = \left\langle S, \ln \overline{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \right\rangle$. *Тогда для любой стратегии* $s \notin S$ *и любого* $\overline{N}(0) > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} \pi_s(t, \overline{N}(0)) = 0$ *на соответствующей траектории системы* (3).

Для автономной модели динамики репликаторов теорема 3 была получена в (Семевский, Семенов, 1982), теорема 4 – в (Taylor, Jonker, 1978), теорема 5 – в (Васин, 1989б).

Модель динамики репликаторов предполагает действие эволюционного механизма, обеспечивающего прямое наследование стратегий родителей детьми. Возникает вопрос: в какой степени указанные результаты зависят от конкретного эволюционного механизма? Оказывается, что он играет критически важную роль.

В качестве альтернативного примера рассмотрим механизм случайного подражания. Эта модель отличается от динамики репликаторов только в одном отношении: новые индивидуумы не наследуют стратегию родителей, а выбирают в качестве объекта подражания случайного взрослого индивидуума и перенимают его стратегию. При этом динамика описывается уравнениями:

$$N_s(t+1) = N_s(t)v_s(t) + \sum_r N_r(t)\,fer_r(t)\left[N_s(t)v_s(t) \Big/ \sum_r N_r(t)v_r(t) \right], \ s \in S .$$

Динамика такой системы согласована с функцией выживаемости $v_s(t)$ в смысле теорем 3–5, т.е. в данном случае эндогенной функцией полезности оказывается выживаемость, а не приспособленность.

Из анализа предыдущих примеров может возникнуть впечатление, что мы зашли в тупик, сменив произвольный выбор целевых функций на произвольный выбор эволюционного механизма. Однако это не так, если принять во внимание, что эволюционные механизмы тоже подвержены естественному отбору. В природе существует конкуренция эволюционных механизмов, и с течением времени отбираются наиболее эффективные.

Рассмотрим соответствующую модель сообщества нескольких популяций, различающихся только эволюционными механизмами. Индивидуумы всех популяций взаимодействуют между собой и в процессе взаимодействия не различают популяций, т.е. эволюционный механизм индивидуума является ненаблюдаемым параметром. Как и выше, итог взаимодействия для индивидуумов со стратегией s характеризуется функциями рождаемости и выживаемости $fer_s(\pi, N), v_s(\pi, N)$, зависящими от общего распределения по стратегиям во всем сообществе и его численности. Множество стратегий S и данные функции одинаковы для всех популяций. Обозначим через L множество популяций, N_l – численность популяции l, N – общую численность сообщества, $\pi^l = \{\pi_s^l, s \in S\}$ – распределение по стратегиям в рамках популяции l. Тогда общее распределение π по стратегиям имеет вид $\pi = \sum_l N^l \pi^l / N$. Пусть изменение распределения по стратегиям в популяции l описывается оператором Φ^l, соответствующим эволюционному механизму этой популяции. (Например, в одной популяции – это прямое наследование стратегий, в другой – случайное подражание выжившим и т.п. В частности, динамика поведения может быть связана с максимизацией некоторой функции выигрыша). Динамика сообщества описывается системой:

$$N^l(t+1) = N^l(t)\sum_s \pi_s^l(t) f_s(\pi(t), N(t)), \qquad (4)$$

$$\pi^l(t+1) = \Phi^l(\pi^k(t), N^k(t), k \in L), \quad l \in L .$$

Теорема 6. *Пусть в сообществе существует популяция с механизмом прямого наследования и функция приспособленности разложима. Тогда для динамики общего распределения* $\pi(t)$ *справедливы следующие аналоги теорем* 3 *и* 4.

1. Любое устойчивое распределение π *системы* (4) *является равновесием Нэша в популяционной игре* $\overline{G} = \left\langle S, \overline{f}_s(\pi), s \in S \right\rangle$.

2. Если для некоторой траектории $\left\{\overline{N}(t))\right\}$ *начальное распределение* $\overline{N}(0) > 0$ *и* $\lim_{t\to\infty} \pi(\overline{N}(0), t) = \pi^*$*, то* π^* *является равновесием Нэша указанной популяционной игры.*

3. Пусть π *– строгое равновесие для популяционной игры* $\bar{G}$*, тогда* π *– асимптотически устойчивое распределение системы* (4).

Первая версия этого утверждения была получена в (Васин, 1989а, с. 65–70), а данный вариант соответствует изложенному в (Васин, 1995).

Таким образом, модель отбора эволюционных механизмов приводит к выводу, что приспособленность является эндогенной функцией полезности для любой самовоспроизводящейся популяции.

Идея доказательства первых двух утверждений теоремы прозрачна: если стационарное распределение по стратегиям не является равновесием Нэша относительно функции приспособленности, то ничто не может помешать распространению репликаторов, использующих стратегию оптимального ответа на это распределение, что противоречит его устойчивости.

Для обобщения теоремы 6 об исключении доминируемых стратегий требуются более сильные предположения о разнообразии эволюционных механизмов. Пусть в сообществе есть популяция с эволюционным механизмом Φ^l. Для любой пары стратегий s, r назовем *s*–*r*-замещением механизма Φ^l механизм $\Phi^l_{s,r}$ такой, что для стратегий, отличающихся от *s*, *r*, доли индивидуумов, реализующих эти стратегии, меняются так же, как и при механизме Φ^l, а вместо стратегии *s* всегда используется стратегия *r*. Как показано в (Васин, 1995), если для любых *s*, *r*, *l* множество механизмов содержит всевозможные замещения $\Phi^l_{s,r}$, то справедлив аналог теоремы 6: любая исключаемая по строгому доминированию стратегия исчезает со временем, т.е. $\pi_s(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Сформулированный результат относится к однородным популяциям без учета возрастной и половой структуры, но легко обобщается для популяций с такими структурами. При этом аналогом приспособленности является скорость сбалансированного роста популяции, определяемая числом Фробениуса матрицы Лесли (Семевский, Семенов, 1982).

4. Заключение

Изложенные модели и результаты ЭТИ показывают, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях согласована с известными теоретико-игровыми принципами оптимальности – равновесием Нэша и исключением доминируемых стратегий. При этом эндогенно формируемая функция выигрыша соответствует определенной Ч. Дарвином индивидуальной приспособленности. Согласованность с указанными принципами оптимальности возникает под действием естественного отбора, а также в результате адаптивно-подражательных изменений в поведении.

Как в биологических, так и в социальных популяциях хорошо известны такие формы поведения, как кооперация и альтруизм, которые, видимо, не согласуются с оптимизацией индивидуальной приспособленности. Во второй части обзора будут изложены эволюционные модели, объясняющие распространение альтруистического и кооперативного поведения в отношениях родственников. Эти модели показывают, что такое поведение является эволюционно устойчивым, если при этом максимизируется суммарная приспособленность семьи.

Демографические данные воспроизводства населения во многих странах свидетельствуют о том, что поведение в современных социальных популяциях не максимизирует ни индивидуальную, ни групповую приспособленность, хотя эти популяции, очевидно, являются самовоспроизводящимися. Во второй части обзора мы обсудим, почему изложенные эволюционные модели и вытекающие из них результаты непосредственно не приложимы к социальным популяциям. На основе понятия супериндивида (самовоспроизводящейся структуры, которая использует человеческую популяцию как ресурс для собственного воспроизводства и способна влиять на динамику поведения в этой популяции) будет предложен подход к определению функций выигрыша, альтернативный как по отношению к модели «homo economicus», так и по отношению к биологическим понятиям приспособленности.

Литература

Богданов А.В., Васин А.А. (2002): Модели адаптивно-подражательного поведения. I. Связь с равновесиями Нэша и решениями по доминированию // *Теория и системы управления. Известия Российской академии наук*. № 1. С. 102–111.

Васин А.А. (1989а): Модели динамики коллективного поведения. М.: Изд-во МГУ.

Васин А.А. (1989б): Методы теории игр в исследовании динамики коллективного поведения // *Вестник МГУ. Серия 15*. № 2. С. 55–60.

Васин А.А. (1995): О некоторых проблемах теории коллективного поведения // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Т. 2. Вып. 4.

Семевский Ф.И., Семенов С.М. (1982): Математическое моделирование экологических процессов. Л.: Гидрометеоиздат.

Atkinson A.B., Stiglitz J.E. (1980): Lectures on Public Economics. London: McGraw-Hill.

Myles G. (1995): Public Economics. Cambridge: Cambridge University Press.

Ok E.A., Vega-Redondo F. (2001): On the Evolution of Individualistic Preferences: An Incomplete Information Scenario // *Journal of Econ. Theory.* Vol. 97(2). P.231–254.

Samuelson L., Zhang J. (1992): Evolutionary stability in asymmetric games // *Journal of Econ. Theory.* Vol. 57.

Schaffer M. (1988): Evolutionary Stable Strategies for a Finite Population and a Variable Contest Size // *Journal of Theoretical Biology.* Vol. 132. P. 469–478.

Schaffer M. (1989): Are Profit-Maximizers the Best Survivors? // *Journal of Econ. Behavior and Organization.* Vol. 12. P. 29–45.

Smith M.J., Price G.R. (1973): The Logic of Animal Conflict // *Nature*. Vol. 246. P. 15–18.

Smith M.J. (1982): Evolution and the Theory of Games. Cambridge: Cambridge University Press.

Taylor P., Jonker L. (1978): Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics // *Math. Biosciences*. № 40. P. 145–156.

Weibull J. (1995): Evolutionary Game Theory. Cambridge: The MIT Press.

Поступила в редакцию 16.09.2009 г.

A.A. Vasin,
The Lomonosov Moscow State University

Evolutionary Game Theory and Economics.

Part One. Optimality Principles and Models of Behavior Dynamics

The paper discusses basic concepts of the evolutionary game theory and provides a survey of the most important applications to modeling of economic behavior. We expound the foundation for application of the Nash equilibrium concept to agents with bounded rationality and incomplete information. We discuss models of formation of payoff functions, or evolution of preferences.

Keywords: *evolutionary stable strategy, replicator dynamics, adaptive dynamics*.

JEL classification: C73.